

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.1150

基于贝叶斯更新的非饱和土坡参数概率反演及变形预测

仇文岗^{1,2,3}, 顾 鑫², 刘汉龙^{1,2,3}, 张 青⁴, 王 林^{1,2,3}, 王鲁琦^{1,2,3}

(1. 重庆大学 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045;
3. 重庆大学 库区环境地质灾害防治国家地方联合工程研究中心, 重庆 400045; 4. 中国地质调查局水文地质环境调查中心, 河北 保定 071051)

摘 要: 滑坡变形预测一直是实现滑坡灾害预报与防控的有效手段。岩土体参数是开展滑坡变形计算的关键输入信息, 然而目前研究鲜有考虑岩土体参数不确定性对滑坡变形的影响, 如何融合有限监测数据实现岩土体参数不确定性定量表征及滑坡变形概率预测仍然是一大难点。以降雨入渗非饱和土坡为例, 开展流固耦合分析, 基于有限的孔压监测数据, 利用 DREAM_zs 算法实现对岩土体参数的高效概率反演。根据岩土体参数的先验分布, 采用拉丁超立方抽样法生成随机样本, 将其导入 ABAQUS 中计算相应的坡脚变形作为数据集, 分别采用多元自适应回归样条曲线 (MARS) 和 LightGBM 模型构建基于数理-机制双驱动的边坡坡脚变形预测模型, 计算贝叶斯更新后的后验稳态样本对应的边坡坡脚变形值, 并对边坡变形值开展统计分析。结果表明: DREAM_zs 算法仅需少量的孔压监测数据, 即可完成对岩土体参数的更新, 并且计算效率高、收敛速度快。此外, 提出的边坡坡脚变形预测模型不仅突破了由孔压等间接监测数据来预测边坡变形的局限, 同时还实现了对边坡变形发生概率的预测, 为滑坡变形预测提供了新的思路和探索。

关 键 词: 贝叶斯更新; 非饱和土; 流固耦合分析; 机器学习; 变形预测模型

中图分类号: TU 42

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 04-1112-11

Probabilistic back analysis of soil parameters and displacement prediction of unsaturated slopes using Bayesian updating

ZHANG Wen-gang^{1,2,3}, GU Xin², LIU Han-long^{1,2,3}, ZHANG Qing⁴, WANG Lin^{1,2,3}, WANG Lu-qi^{1,2,3}

(1. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
2. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
3. National Joint Engineering Research Center of Geohazards Prevention in the Reservoir Areas, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
4. Center for Hydrogeology and Environmental Geology, China Geological Survey, Baoding, Hebei 071051, China)

Abstract: Displacement prediction has always been an effective means for conducting the prediction and prevention of landslide disasters. Geotechnical parameters are key input information for landslide deformation calculation, and are rarely considered in the current study. How to conduct the probabilistic prediction of the landslide deformation based on the quantitative characterization of the uncertainties in geotechnical parameters with limited monitoring data is still a prominent difficulty. A case of unsaturated soil slope under rainfall infiltration is investigated and the coupled hydro-mechanical analysis is performed. Based on the spare monitored pore water pressure data, the probabilistic back analysis of geotechnical parameters is efficiently accomplished via the DREAM_zs algorithm. A set of random samples are obtained via the Latin hypercube sampling in accordance with the prior distribution of the geotechnical parameters, and they are utilized to calculate the displacements at the slope toe through the numerical software ABAQUS. Then, a coupled numerical-mechanical displacement prediction model is established through the multiple adaptive regression splines (MARS) and LightGBM algorithm. Based on this model, the displacements at the slope toe are predicted with the stationary posterior samples and the statistical analysis is performed accordingly. It is found that the DREAM_zs algorithm can perform the probabilistic back analysis of geotechnical parameters using limited monitored data with high efficiency and fast convergence. In addition, the proposed displacement prediction model breaks through the limitation of displacement prediction with

收稿日期: 2021-07-27

修回日期: 2021-11-05

基金项目: 国家重点研发计划重点专项 (No. 2019YFC1509605); 国家自然科学基金 (No. 52108299, No. 52008058)。

This work was supported by the National Key R&D Program of China (2019YFC1509605) and the National Natural Science Foundation of China (52108299, 52008058).

第一作者简介: 仇文岗, 男, 1983 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程可靠度分析和风险控制方面的研究。E-mail: zhangwg@cqu.edu.cn

通讯作者: 王林, 男, 1989 年生, 博士, 助理研究员, 主要从事岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究。E-mail: sdxwyanlin@cqu.edu.cn

indirect monitored data such as pore water pressure. And the occurrence probability of slope deformation is also obtained. Furthermore, this study provides a novel idea and attempt for slope deformation prediction.

Keywords: Bayesian updating; unsaturated soils; coupled hydro-mechanical analysis; machine learning; displacement prediction model

1 引言

降雨入渗引发的滑坡事故具有突发性、隐蔽性和强破坏性等特点, 一经发生, 将对国民经济和人民生命财产安全造成严重威胁^[1-4]。例如, 2019年7月23日, 持续性的强降雨致使贵州水城发生特大山体滑坡, 42人遇难, 多人失联, 21幢房屋被埋^[5]。因此, 开展降雨诱发滑坡变形的预测预报研究, 为滑坡应急管理部门制定抢险救灾方案提供可靠的依据, 对降低灾害损失、保障民生和满足人民对美好生活的向往具有重要意义。

目前根据是否考虑滑坡机制, 可将滑坡变形预测模型分为两类^[6]。一是物理模型 (physics-based), 即根据岩土体参数与滑坡变形之间的物理关系来建立预测模型。Herrera 等^[7]基于滑坡变形时序监测数据对一维无限边坡模型参数进行修正, 并用于对滑坡时序变形进行预测, 取得了较好的预测效果。Zhao 等^[8]对降雨入渗滑坡在 ABAQUS 中开展流固耦合分析, 基于数值计算结果对三峡库区三门洞滑坡进行变形预测。二是现象模型, 即直接基于某一特定滑坡的现场实测变形数据及其诱发因素建立数学预测模型 (data-driven), 无需考虑岩土体本身的变形机制, 因其概念简单被广为运用。如杜鹃^[9]、杨背背^[10]、郇凯^[11]等将滑坡实测累积变形分解为趋势项和周期项, 趋势项位移采用回归多项式或等维新息灰色模型进行拟合预测, 而周期项位移则采用 BP 神经网络、长短期记忆网络 LSTM、自回归模型等进行预测。

天然岩土体参数存在大量的不确定性^[12-13], 如参数的空间变异性、测量误差、转换模型的不确定性、统计不确定性等, 这使得室内试验测得的土体参数值同现场真实值往往存在一定的差异, 进而导致以传统确定性分析结果将难以准确预估工程实际响应 (如孔压、变形)。为此, 国内外许多学者借助贝叶斯理论, 通过融合参数的先验信息和有限的现场实测数据, 在岩土体参数的概率反演及后验推断方面开展了大量研究。如 Wang 等^[14]基于有限的标准贯入试验 (SPT) 数据采用马尔科夫蒙特卡洛模拟 (MCMC) 间接识别了土体的弹性模量。左自波等^[12]基于孔压监测数据采用自适应差分演化 Metropolis 算法 (DREAM) 对非饱和土的渗流参数

开展了随机反演并对孔压进行了长期预测。Kelly 等^[15]基于沉降和超孔压实测数据对土体固结参数进行了贝叶斯更新。蒋水华等^[16]基于有限的结构面露头实测数据和 BUS 方法 (Bayesian updating with structural reliability methods) 对岩质边坡的几何参数进行了概率反演并开展了可靠度分析。Li 等^[17]基于多源监测数据运用 HMC (Hamiltonian Monte Carlo) 算法对岩土体参数开展了序贯概率反演并对结构的可靠度进行了更新校准。

尽管目前在滑坡变形预测领域取得了一定的进展, 然而, 用于预测滑坡变形的物理模型通常为确定性模型, 鲜有考虑参数的统计不确定性对滑坡变形的影响, 且其预测结果为单一确定的点预测值, 无法提供变形预测值的置信度或不确定性大小。涉及现象模型的研究中尚未考虑岩土体内在的变形机制, 亦忽略了岩土体参数的统计不确定性。为此, 本文首先运用 Ter Braak 等^[18]提出的 DREAM_zs 算法, 基于孔压实测数据对非饱和土坡的岩土体参数开展概率反演。同时依据各参数的先验信息, 开展数值计算, 从机制的角度计算边坡坡脚变形值。根据数值计算的坡脚变形, 提出基于多元自适应回归样条曲线 (MARS) 和 LightGBM 算法的边坡坡脚变形预测模型, 用于预测贝叶斯更新后的坡脚变形并开展统计分析, 评估降雨后坡脚变形值的最可能范围。本研究提出的边坡变形预测思路, 既考虑了岩土体参数统计不确定性对边坡变形的影响, 同时也创造性地从数理-机制双驱动的角度对滑坡变形进行了概率预测, 为滑坡防治决策部门提供科学可靠的参考依据。

2 基于监测数据的参数概率反演

定义 $t_1 \sim t_N$ 时刻, 非饱和土坡孔压响应的监测值为 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, 相应的理论值为 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ 。孔压理论值与实测值的残差向量为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}$, 其中 $\varepsilon_i = y_i - Y_i$, $i=1, 2, \dots, N$ 。假设残差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 服从均值为 0 的独立等方差高斯分布 $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$, 其中 σ_{ε}^2 为常数^[19]。设 $\boldsymbol{\theta}$ 为待反演参数的随机向量, 则似然函数为

$$f(y|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varepsilon}^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - Y_i)^2}{2\sigma_{\varepsilon}^2}\right) \quad (1)$$

根据贝叶斯原理,由式(1)和随机向量 θ 先验分布 $f(\theta)$ 可以得到随机向量 θ 的后验概率密度函数为

$$f(\theta|y) = \lambda f(\theta)f(y|\theta) = \lambda f(\theta) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - Y_i)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (2)$$

式中: λ 为归一化常数:

$$\lambda = \left[\int f(\theta)f(y|\theta)d\theta \right]^{-1} \quad (3)$$

3 马尔科夫链蒙特卡洛模拟

后验概率密度函数 (posterior PDF) 的求解是贝叶斯理论框架下实现参数概率反演的核心,其计算方法通常有 3 种:直接数值积分法^[20] (direct numerical integration, DNI)、拉普拉斯近似法^[21] (Laplace asymptotic approximation method, LAAM) 和马尔科夫链蒙特卡洛模拟法^[22-23] (MCMC)。直接数值积分法仅适用于反演参数数目较少的情形。拉普拉斯近似法假定待识别参数的后验分布服从联合正态分布,而联合正态分布仅在大量试验数据的条件下才近似成立。在岩土工程实际应用中,贝叶斯方程中待识别岩土体参数的维度一般较高,且现场实测数据往往是有限的,这极大地限制了 DNI 法和 LAAM 的适用范围。相比之下, MCMC 的基本思想是构造一个平稳分布为待求后验分布 (如式(2)) 的马尔科夫链,取链上收敛段的随机样本来计算后验分布的均值和标准差,这巧妙地避开了繁杂的高维数值积分计算,故 MCMC 成为求解贝叶斯方程的高效途径之一。常见的 MCMC 有 Metropolis-Hastings (M-H) 等基本算法^[24]。尽管 M-H 算法在大多数贝叶斯更新问题中均能取得较理想的效果,然而马氏链有很长的“燃烧段”,使得该算法生成稳定后验样本的效率较低,并且随着待反演岩土体参数维度的增加, M-H 算法的效率会进一步降低。为了克服这一局限, Vrugt 等^[25]提出了一种改进的马尔科夫链蒙特卡洛 DREAM 算法。该算法具有能够同时运行多条链、自动选择全局搜索的步长和方位的优点,当反演参数的维度较高时,该算法具有极高的收敛效率。为获取平稳的后验稳态样本, DREAM 算法要求同时运行马氏链的数量 $N \approx d$ 或 $2d$ (d 为反演参数的维度)。为了进一步提高贝叶斯更新的效率, Ter Braak 等^[18]在 DREAM 算法基础上,进一步提出了 DREAM_zs 算法,该算法继承了 DREAM 法可自适应随机抽样的优点,其主要的优越性在于仅需极少量的马氏链,

就可保证多数随机参数反演问题中后验分布的收敛性。DREAM_zs 算法的操作步骤如下:

(1) 确定反演参数的数目 d , 初始化马氏链的数量 N (通常, 取 3) 以及每条马氏链的样本数 T 。

(2) 采用改进的自适应差分演化方法 (DREAM_zs 算法)。不同于 DREAM 算法的是 DREAM_zs 算法在抽样时会考虑马氏链上已有样本对新生成候选样本的影响, 则第 i 条马氏链上第 t 个候选样本 z^i 的计算表达式为

$$z^i = \theta_{t-1}^i + \zeta_n + (1 + \lambda_n) \gamma(\delta, n) \sum_{j=1}^{\delta} (Z^{a_j} - Z^{b_j}) \quad (4)$$

式中: θ_{t-1}^i 为第 i 条马氏链上的第 $t-1$ 个样本点; ζ_n 、 λ_n 分别为取自正态分布 $N(0, \beta^*)$ 、均匀分布 $u(-\beta, \beta)$ 的随机数; 缩放因子 $\gamma(\delta, n) = 2.38/(2\delta n)^{0.5}$; Z^{a_j} 、 Z^{b_j} 分别为矩阵 Z 中的两个样本; $a_j, b_j \in \{1, 2, \dots, N\}$; δ 为计算缩放因子的点对数量。Laloy 等^[26]建议 β 取 0.05, β^* 取 10^{-12} 。

(3) 由下式确定是否用 θ_{t-1}^i 取代 z^i

$$z_j^i = \begin{cases} \theta_{j,t-1}^i, & u \leq 1 - P_{CR} \\ z_j^i, & \text{其他} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, d \quad (5)$$

式中: 交叉概率 P_{CR} 的值与候选样本点 z_j^i 有关^[26]。

(4) 根据后验概率密度函数计算接受率 α , 决定是否接受 z^i 成为马氏链上下一位置的样本 θ_t^i :

$$\alpha = \begin{cases} \min\left(1.0, \frac{f(z^i|y)}{f(\theta_{t-1}^i|y)}\right), & f(\theta_{t-1}^i|y) > 0 \\ 1, & f(\theta_{t-1}^i|y) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(5) 在均匀分布 $u(0,1)$ 上产生一个随机数 v , 若 $\alpha \geq v$, 则接受候选样本 z^i , 即 $\theta_t^i = z^i$; 否则, 拒绝 z^i , $\theta_t^i = \theta_{t-1}^i$ 。

(6) 重复步骤 (2) ~ (5), 直至满足 Gelman 等^[27]提出的收敛准则。当基于链内方差 W 和链间方差 B 算得的 $R_{sat} \leq 1.2$ (见式(7)), 即可判定马氏链收敛。根据马氏链平稳段的随机样本, 计算各参数的后验分布和统计指标 (如均值和标准差)。

$$R_{sat} = \sqrt{\frac{T-1}{T} + \frac{N+1}{NT} \frac{B}{W}} \quad (7)$$

式中: T 为每条马氏链的样本数; N 为马氏链的数目。

4 基于数理-机制双驱动的滑坡变形预测方法

4.1 多元自适应回归样条曲线 (MARS)

MARS 是一种非线性的数据驱动算法, 具有无需

预先假设输入量与输出量之间映射关系的优点^[28-29]。MARS 算法包括向前选择和向后剪枝两个过程。在向前选择的过程中，基于训练集拟合出一个 MARS 模型，该模型是由一系列具有不同梯度的分段线段所构成。每条线段的端点称之为一个结点，每条线段代表一个基函数。因此，MARS 模型的计算公式如下：

$$f(\mathbf{X}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i BF_i(\mathbf{X}) \quad (8)$$

式中： β_0 为常数； $BF_i(\mathbf{X})$ 为第 i 个基函数； β_i 为 $BF_i(\mathbf{X})$ 的权重，由最小二乘法计算得到； N 表示最大基函数的数目。

为了防止过拟合，该算法在向后剪枝的过程中采用广义交叉验证法（GCV）选择并剔除多余的基函数，确保最终的 MARS 模型在测试集上具有较好的泛化能力。记最优 MARS 模型的预测值 $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ ，目标值 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ， $\bar{y}$ 为目标值 y_i 的平均值，则模型性能评估指标可表示为

均方根误差：

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_j - y_j)^2} \quad (9)$$

决定系数：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - y_j)^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} \quad (10)$$

此外，MARS 模型最大基函数的数量是该算法的主要超参数。一般情况下，最优最大基函数数量应使 R^2 最大（或者 RMSE 取最小值）。

4.2 LightGBM 算法

LightGBM (light gradient boosting machine) 算法^[30-31]是基于梯度提升迭代决策树 (GBDT) 的一种新型集成学习算法。在 GBDT 的框架下，该算法引入直方图算法 (histogram) 和带深度限制的叶子生长策略 (leaf-wise) 对基学习器进行了优化，以加速模型的训练速度。此外，LightGBM 还引入了基于梯度的单边采样算法 (GOSS) 和互斥特征捆绑算法 (EFB)。GOSS 算法的作用是进行采样优化，确保未被充分训练的样本数据得以有效利用。EFB 算法的作用是将互斥特征捆绑在一起，以降低特征的维度，从而提高模型的训练速度。因此，LightGBM 算法具有模型训练速度快、消耗内存低、预测精度高等优点。利用 LightGBM 算法建立机器学习预测模型包含以下几个步骤：

(1) Python 3.7 环境下配置 LightGBM 算法。

(2) 将原始数据集划分按照 7:3 的比例划分为训练集和测试集。

(3) 训练集用于模型的训练，初步建立 LightGBM 模型。

(4) 通过 5 折交叉验证法对 LightGBM 模型的超参数进行调优，该算法的关键超参数如表 1 所示。

(5) 将超参数调优后的 LightGBM 模型用于对测试集开展预测，以检验该模型的泛化能力。

表 1 LightGBM 主要参数

参数	含义	作用
learning_rate	学习率	控制收敛速度
max_depth	树的最大深度	
num_leaves	树的复杂程度	
min_child_samples	叶子最小数据量	
min_child_weight	实例最小权重和	防止过拟合
feature_fraction	每轮训练模型的特征比例	
bagging_fraction	每轮训练模型的样本比例	
lambda_l1	正则化参数	
lambda_l2		

4.3 计算流程

本文提出的融合贝叶斯参数更新和机器学习模型构建的滑坡变形预测方法的计算流程如图 1 所示。

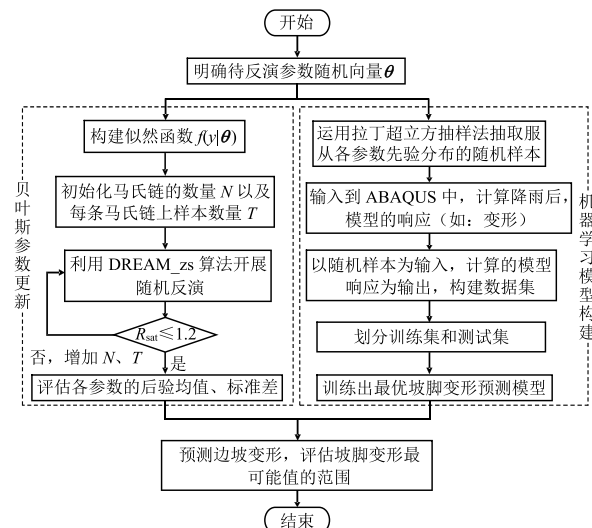


图 1 岩土体参数概率反演及滑坡变形预测流程图
Fig.1 Flow chart of probabilistic inference of geotechnical parameters and prediction of landslide deformations

(1) 确定需要进行随机反演的岩土体参数 θ 。

(2) 给定参数 θ 的先验分布 $f(\theta)$ ，并通过当量正态化将所有参数转化成服从高斯分布的形式。

(3) 根据实测数据和有限元模型计算值（如孔压等）确定似然函数 $f(y|\theta)$ 。

(4) 采用 DREAM_zs 算法，初始化最大马氏链

数量 N 以及每条马氏链的样本量 T , 由此产生服从各参数后验分布 $f(\theta|y)$ 的随机样本。

(5) 根据 $R_{\text{sat}} \leq 1.2$, 确定马氏链收敛段的随机样本, 由此计算各参数的后验均值、标准差。

(6) 采取拉丁超立方抽样法抽取服从各参数的先验分布的随机样本, 将每组样本输入 ABAQUS 软件计算边坡模型的坡脚变形响应, 由此训练最优的 MARS 模型和 LightGBM 模型。将贝叶斯更新后的各参数的后验平稳样本输入到机器学习模型, 实现对边坡坡脚变形的预测。

(7) 基于预测的边坡变形响应, 开展统计分析, 评估坡脚变形最可能值的范围及其发生概率。

5 算例分析

本文的数值模型选自文献[2], 在有限元软件 ABAQUS 中对该边坡模型开展流固耦合分析。在降雨过程中, 对坡顶下方 1 m 处 M 点的孔压响应进行监测。基于孔压监测数据, 开展岩土体参数的随机反演, 验证本文所提方法的有效性。

5.1 非饱和土坡降雨入渗模型

图 2 为降雨入渗条件下 (强度 $q=0.012 \text{ m/h}$, 中雨) 非饱和土坡模型示意图。初始静水位高度距边坡底部 8 m, 即 EF 。ABCD 为边坡降雨入渗边界。水位线以上 AF 和 DE 为不透水边界。该边坡模型的底部边界为水平约束、垂直约束, 左、右边界均为水平约束。边坡土体为各向同性砂土, 本构模型选用摩尔-库仑模型。边坡模型的相关参数如表 2 所示。

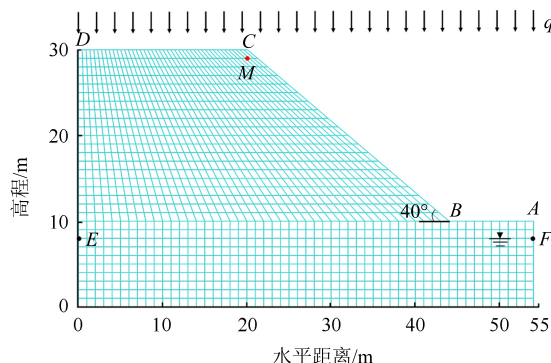


图 2 降雨入渗边坡模型示意图

Fig.2 Illustration of slope model under rainfall infiltration

表 2 边坡模型的相关参数^[2]
Table 2 Parameters for slope model^[2]

密度 ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	泊松比 ν	弹性模量 E/kPa	渗透系数 $k_s/(\text{m} \cdot \text{h}^{-1})$	黏聚力 c'/kPa	残余饱和度 $\theta_r/\%$	$\alpha/(\text{kPa}^{-1})$	n_w	l	内摩擦角 $\varphi'/(^{\circ})$
1 800	0.3	10 000	0.036	12	0	0.04	1.2	0.5	30

根据质量守恒定律和 Darcy 定律, 二维非饱和土坡的渗流控制方程为^[32]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial \theta_w}{\partial t} \quad (11)$$

式中: k 为渗透系数 (边坡土体为各向同性砂土); θ_w 为体积含水率; t 为时间; H 为总水头。

本文的土-水特征曲线选用 VGM (van Genuchten^[33]-Mualem^[34]) 模型, 其表达式如下:

$$S = \frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \left(1 + |\alpha u_w|^n \right)^{-m}, & u_w < 0 \\ 1, & u_w \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: S 为有效饱和度; θ_s 和 θ_r 分别为砂土的饱和体积含水率和残余体积含水率; α 、 m 、 n 均为土-水特征曲线模型参数, 且 m 与 n 满足: $m=1-1/n$ 。

非饱和土的渗透系数方程为

$$k(S) = k_s S^l \left[1 - (1 - S^{1/m})^m \right]^2 \quad (13)$$

式中: k_s 为砂土饱和渗透系数; l 为孔隙连通性参数。

基于有效应力建立的非饱和土抗剪强度准则为^[35]

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan \varphi' + \chi(u_a - u_w) \tan \varphi' \quad (14)$$

式中: c' 、 φ' 分别为有效黏聚力和有效内摩擦角; σ 为总应力; χ 为有效应力参数; u_a 、 u_w 为孔隙气压力和孔隙水压力, 因与大气连通, 本研究取 $u_a=0$ 。

在建立有限元模型时, 网格尺寸有时会对计算结果产生影响, 且本研究有限元模型计算的孔压监测值决定了后续参数反演及坡脚变形预测的准确性, 为此, 本文首先探究了不同网格尺寸 L 对 M 点孔压监测值的影响, 如图 3 所示。由图可知, 网格尺寸对 M 点孔压监测值具有显著影响, 随着 L 由 1.0 m 加密至 0.5 m, 孔压监测曲线趋于稳定, 部分区段几乎重合, 因此, 为确保孔压计算结果的准确性以及有限元计算的效率, 图 2 边坡模型的 L 取 1.0 m。此外, 图 3 进一步探讨了 L 对坡脚 B 点变形计算值的影响。 $L=1.0 \text{ m}$ 时计算的坡脚变形值, 同 $L=0.5 \text{ m}$ 和 $L=2.0 \text{ m}$ 时的计算结果相比, 绝对误差分别为 1.624 mm 和 8.100 mm。可见, 加密网格至 0.5 m, 对坡脚变形值的影响相对较小。综合分析可知, 本研究选取有限元网格尺寸 $L=1.0 \text{ m}$ 可兼顾 M

点孔压监测值和边坡坡脚变形值的准确性, 故 $L=1.0\text{ m}$ 是合理的, 如图 2 所示。

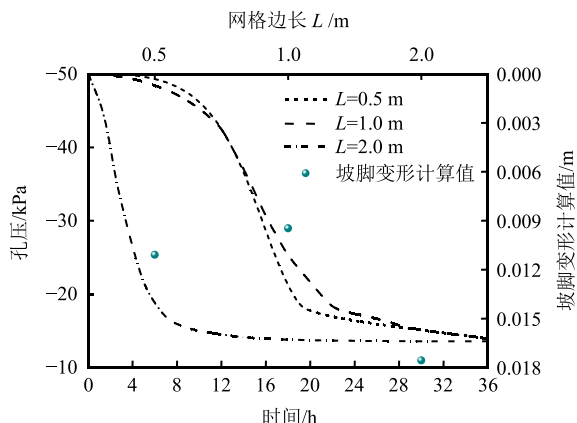


图 3 有限元网格尺寸对孔压监测值及坡脚变形值的影响

Fig.3 Effect of mesh size on monitored pore water pressure and displacement at slope toe

5.2 参数的随机反演

通常, 水位线以上, 孔压 (负值) 随高度线性减小, 参照文献[36], 本研究对图 2 边坡作如下假定: 非饱和区内最大负孔压为 -50 kPa , 由此开展降雨入渗非饱和土坡的流固耦合分析。将变形参数 E , 水力参数 k_s 、 α , 强度参数 c' 、 ϕ' 作为待反演的随机参数[2], 其先验分布和统计值如表 3 所示。

表 3 随机变量的先验信息[2]

Table 3 Prior information of random variables[2]

参数	均值	标准差	分布类型	最大值	最小值
$\ln E$	9.180	0.246	正态	8.2	10.1
$\ln k_s$	-3.355	0.246	正态	-4.2	-2.5
$\ln \alpha$	-3.249	0.246	正态	-4.1	-2.4
$\ln \tan \phi'$	-0.550	0.100	正态	-0.9	-0.2
c'	12.000	1.800	正态	6.0	18.0

以 M 点为监测点, 每 4 h 提取有限元的孔压输出值, 孔压监测结果如图 4 所示。由于缺乏工程实际监测数据, 本算例中将 M 点的孔压数值解加 5% 的随机噪声作为监测数据[2]。初步设定马氏链的数量为 3 条, 每条链上的最大样本量为 10 000 个, 以 DREAM_zs 算法对本文 5 个待反演的岩土体参数开展随机反演。

图 5 为基于 Gelman 等[27]提出的收敛准则绘制的 R_{sat} 随样本数变化的曲线。从图 5 可以看出, 经 DREAM_zs 算法概率反演后, 各参数均可以在 500 个样本后满足 $R_{\text{sat}} \leq 1.2$, 即达到收敛状态。而文献[2]提到, DREAM 算法对这 5 个参数开展随机反演时, 需 2 000 个样本才可以满足各参数的后验样本收敛。可见, DREAM_zs 算法具有更快的收敛速度。

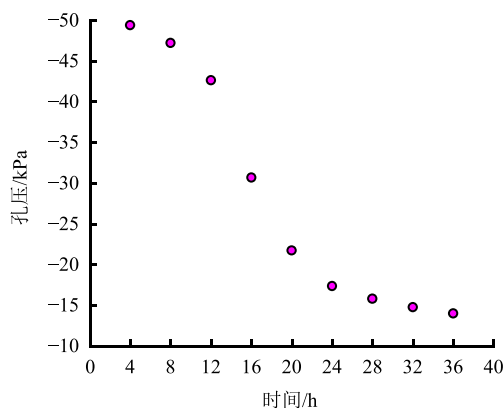


图 4 孔压监测数据

Fig.4 Monitored data for pore water pressure

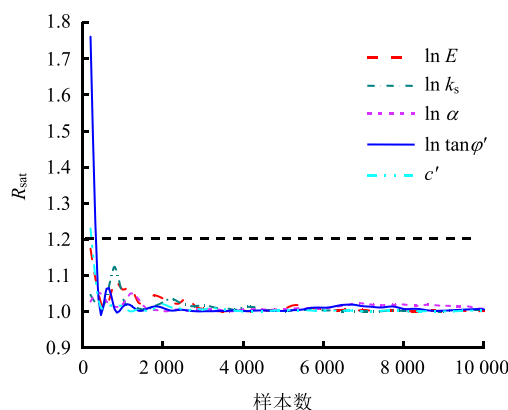


图 5 R_{sat} 随样本数的变化曲线

Fig.5 Curves of R_{sat} versus sample numbers

图 6 分别对比了各参数的先验概率密度函数与后验概率密度函数 (取自各马氏链后 25% 的随机样本)。由图可知, 基于孔压监测数据开展概率反演, 可显著降低水力参数的不确定性 (如图 6(b)、6(c) 所示), 这与文献[2]的结论一致。

表 4 统计了经 DREAM_zs 算法更新后, 各参数的后验均值、标准差。对比本文和文献[2]的参数反演结果可知, 同样根据孔压监测数据, 本文基于 DREAM_zs 算法对水力参数不确定性的降低更显著。而且对变形参数 E 、强度参数 $\ln \tan \phi'$ 也同样具有较好的更新效果, 分析可知, 这可能是由于本文的孔压监测数据取自 ABAQUS 考虑流固耦合后的计算结果, 应力场会对渗流场产生影响所致。值得注意的是, 本研究尚未对有效黏聚力 c' 取得较理想的更新效果, 分析式 (14) 可知, $\tan \phi'$ 同时在 $(\sigma - u_a) \tan \phi'$ 和 $\chi(u_a - u_w) \tan \phi'$ 中起作用, 因此 $\tan \phi'$ 对应力场的贡献相对较大, 导致 ABAQUS 计算的孔压值相应地受 $\tan \phi'$ 的制约更大, 故图 6(d) 的参数更新效果优于图 6(e)。此外, 由表 4 可知, 本文基于 72 个孔压监测数据对 c' 的不确定性降低

程度相较于基于 9 个孔压监测数据的情形略显著, 这进一步印证了 c' 对孔压不敏感。

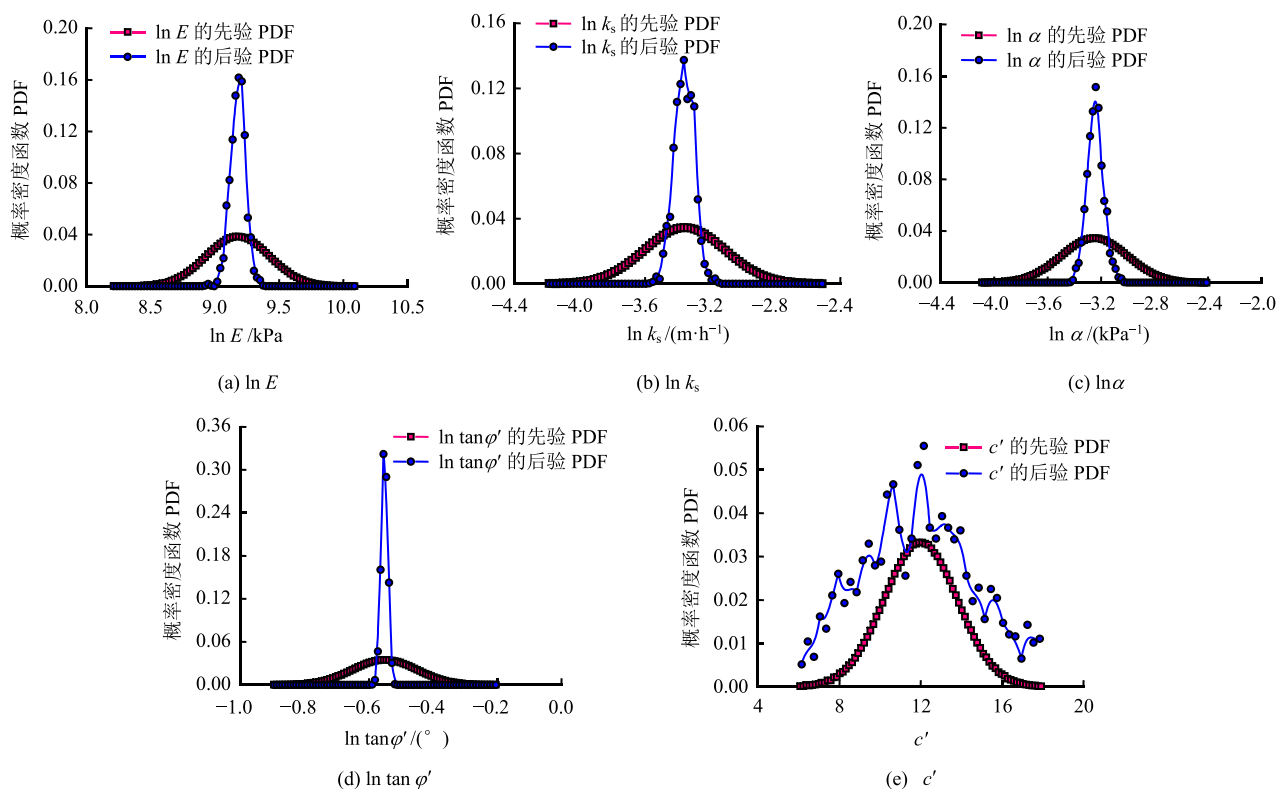


图 6 各岩土体参数的概率密度函数

Fig.6 Probability density function for each geotechnical parameters

表 4 参数的后验分布统计值

参数	本文基于 9 个孔压的数值反演结果		文献 ^[2] 基于 72 个孔压的数值反演结果		本文基于 72 个孔压的数值反演结果	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
$\ln E$	9.179	0.059	9.232	0.223	9.179	0.058
$\ln k_s$	-3.359	0.061	-3.281	0.062	-3.349	0.059
$\ln \alpha$	-3.241	0.062	-3.201	0.031	-3.249	0.061
$\ln \tan \phi'$	-0.551	0.010	-0.550	0.091	-0.550	0.010
c'	11.781	3.424	11.950	1.793	11.896	3.154

注: 本文的 72 个孔压监测数据同文献^[2], 为降雨 36 h 期间每 0.5 h 提取的孔压监测数据。

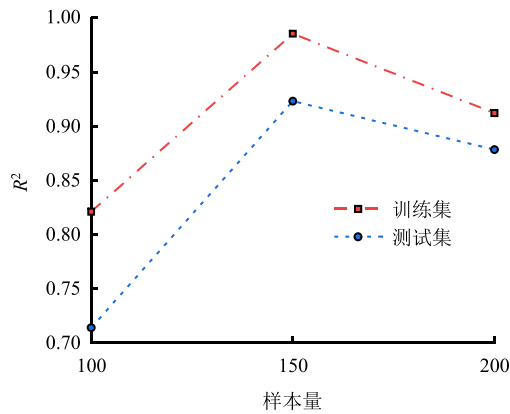
深入分析表 4 可知, DREAM_zs 算法基于 72 个孔压监测数据的后验更新效果>DREAM_zs 算法仅基于 9 个孔压监测数据的后验更新效果>文献^[2]利用 DREAM 算法基于 72 个孔压监测数据的后验更新效果。而且本文的 DREAM_zs 算法仅需 3 条马氏链, 明显少于文献^[2]中的 10 条马氏链。这表明, 在相同数量实测数据时, DREAM_zs 算法相比于 DREAM 算法具有参数反演效率高且不确定性降低程度更显著的优点。

5.3 滑坡变形预测模型的构建

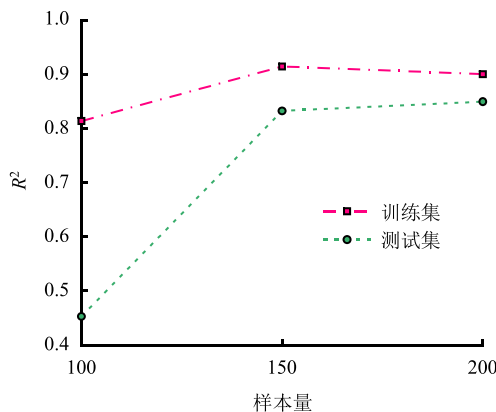
基于表 3 的参数分布, 采用拉丁超立方抽样法

抽取 n 组随机样本, 对图 2 的非饱和土坡模型开展流固耦合分析, 并监测降雨 (36 h) 结束后边坡坡脚 B 点的变形。此处, 随机样本作为输入, 相应的坡脚变形计算值作为输出, 构成数据集, 按照 7:3 的比例划分训练集和测试集, 由此分别构建 MARS 模型和 LightGBM 模型。机器学习模型的准确性采用决定系数 R^2 或均方根误差 RMSE 来衡量。 R^2 越大, 模型的性能越佳。此外, 样本量亦会影响机器学习模型的准确性。为此, 本文采用增量式建模方法, 将 n 分别取 100、150、200, 探究随机样本量 n 的最佳取值, 结果如图 7 所示。综合图 7(a)、7(b) 可知, 当随机样本量 n 为 150 时, 可使 MARS 模型和 LightGBM 模型对本算例边坡的坡脚变形均有较理想的预测性能。

在 MARS 模型中, 由于最大基函数的数目会影响模型的精度, 因此, 根据 R^2 最大, RMSE 最小的原则, 确定模型训练过程中最佳 MARS 模型允许的最大基函数数目为 18。经广义交叉验证后, 最优 MARS 模型的各基函数 (BF) 表达式见表 5。式 (15) 为降雨结束后, 图 2 边坡基于 MARS 模型的坡脚变形预测模型。



(a) MARS 模型



(b) LightGBM 模型

图7 随机样本量对机器学习模型准确性的影响

Fig.7 Influence of random sample size on accuracy of machine learning models

表5 MARS 模型基函数的表达式

Table 5 Basic function equations for MARS model

BF	计算式	BF	计算式
1	$\max(0, X_2 - 0.243\ 5)$	9	$\max(0, 0.400\ 68 - X_4)$
2	$\max(0, 0.243\ 5 - X_2)$	10	$\text{BF6} \times \max(0, X_2 - 0.144\ 13)$
3	$\max(0, X_1 - 0.109\ 64)$	11	$\text{BF6} \times \max(0, 0.144\ 13 - X_2)$
4	$\max(0, 0.109\ 64 - X_1)$	12	$\max(0, 0.367\ 95 - X_3) \times \max(0, X_2 - 0.522\ 06)$
5	$\max(0, X_3 - 0.534\ 37)$	13	$\max(0, 0.367\ 95 - X_3) \times \max(0, 0.522\ 06 - X_2)$
6	$\max(0, 0.534\ 37 - X_3)$	14	$\text{BF6} \times \max(0, 0.534\ 07 - X_1)$
7	$\max(0, X_5 - 0.367\ 95)$	15	$\text{BF3} \times \max(0, 0.247\ 31 - X_2)$
8	$\max(0, X_4 - 0.400\ 68)$		

注: X_i ($i=1, 2, \dots, 5$) 对应本文的 5 个待反演参数, 即 E 、 k_s 、 α 、 $\tan\phi'$ 、 c' 。

$$y_B = 0.325\ 6 - 0.288\ 77 \times \text{BF1} + 1.007\ 2 \times \text{BF2} - 0.251\ 31 \times \text{BF3} + 1.525\ 2 \times \text{BF4} - 0.134\ 15 \times \text{BF5} + 0.337\ 11 \times \text{BF6} - 0.203\ 68 \times \text{BF7} - 0.156\ 17 \times \text{BF8} + 0.219\ 81 \times \text{BF9} - 0.631\ 28 \times \text{BF10} + 3.914\ 8 \times \text{BF11} + 4.389 \times \text{BF12} + 1.233\ 5 \times \text{BF13} + 0.625\ 88 \times \text{BF14} - 1.015\ 8 \times \text{BF15} \quad (15)$$

将上述训练集和测试集用于构建 LightGBM 模型。经超参数调优后, 最优 LightGBM 模型的超参数取值如表 6 所示。

表6 最优 LightGBM 模型的超参数
Table 6 Hyperparameters for the optimal LightGBM model

参数	取值
learning_rate	0.01
max_depth	3
num_leaves	5
min_child_samples	18
min_child_weight	0.001
feature_fraction	0.7
bagging_fraction	0.8
lambda_l1	0
lambda_l2	1.0

输入变量的相对重要性分析结果见图 8。其定量地揭示了坡脚 B 点变形的两类预测模型中, 饱和渗透系数 k_s 是最重要的影响因素, 而强度参数 c' 和 $\tan\phi'$ 的影响相对较弱。具体来讲, MARS 模型评估的各影响因素相对重要性排序为: $k_s > E > \alpha > c' > \tan\phi'$; LightGBM 模型评估的各影响因素相对重要性排序为: $k_s > E > \alpha > \tan\phi' > c'$ 。可见, 本算例中 (降雨强度 $q=0.012\ \text{m/h}$), 影响降雨入渗条件下非饱和土坡坡脚变形的主要因素是水力参数 k_s 、 α 以及变形参数 E 。

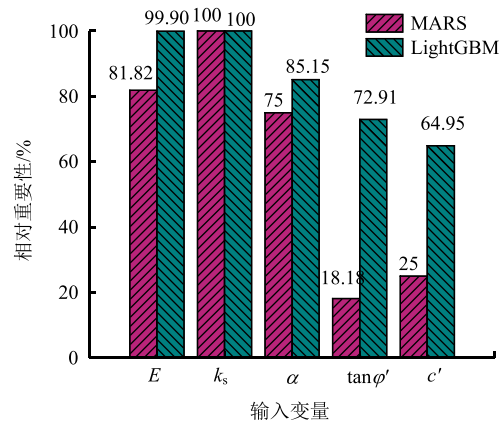


图8 参数的相对重要性分析

Fig.8 Relative importance of each parameters

最优 MARS 模型和 LightGBM 模型对本算例中的边坡坡脚变形的预测效果如图 9 所示。可以看出, MARS 模型在训练集和测试集上的 R^2 均高于 LightGBM 模型。此外, 由式 (15) 可知, MARS 模型相较于 LightGBM 模型, 具有对坡脚变形提供显式预测表达式的优点。因此, 对本算例边坡坡脚变形, MARS 模型具有更理想的预测性能。

图 10 直观地给出了基于贝叶斯更新后的参数和最优预测模型 (即 MARS 模型) 边坡坡脚 B 点变形预测值的分布直方图。可以发现, 基于岩土体参数

后验稳态样本, 计算的 B 点变形值的分布范围 (如图 10 所示) 相较于基于各岩土体参数先验分布计算的 B 点变形值的分布范围 (如图 9 所示) 明显变窄。可见, 对岩土体参数开展贝叶斯更新有助于更精准地预测边坡坡脚变形。此外, 由图 10 还可以看出, 图 2 的边坡在降雨结束后, 基于 MARS 模型评估的坡脚 B 点处变形最可能值的范围介于 $0.006 \sim 0.017 \text{ m}$, 其发生概率高达 95%。

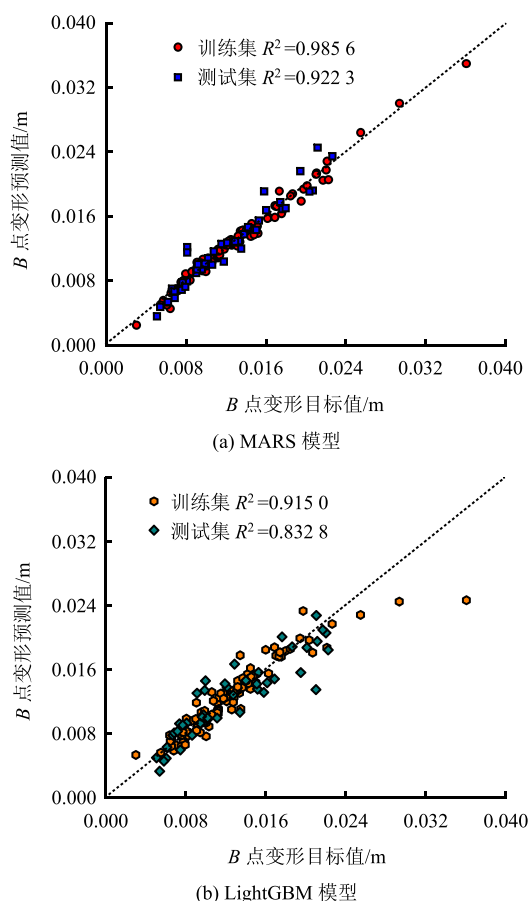


图 9 B 点坡脚变形目标值和预测值的比较

Fig.9 Comparison between the target value and predicted value of the displacements of point B at slope toe

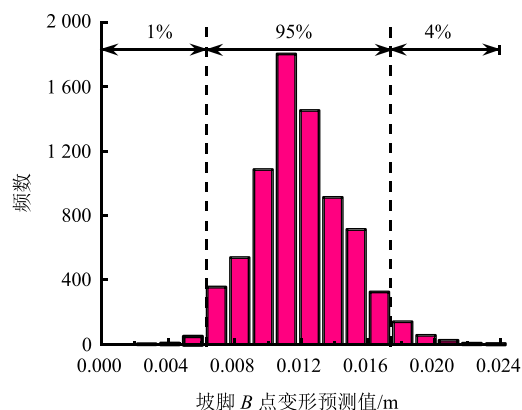


图 10 边坡坡脚 B 点处变形预测值的分布直方图

Fig.10 Histogram of displacements at point B of slope toe

6 结 论

本文提出了一种基于数理-机制双驱动的滑坡变形预测方法。以降雨入渗非饱和土坡为例, 实现了贝叶斯理论框架下基于有限监测数据的岩土体参数高效更新, 并建立了降雨结束后边坡坡脚变形预测的机器学习模型。主要结论如下:

(1) 在有限孔压监测数据条件下, DREAM_zs 算法可以实现对岩土体参数的有效更新, 并且计算效率高, 收敛速度快。

(2) 基于数理-机制双驱动的边坡坡脚变形预测模型, 既考虑了岩土体参数本身的统计不确定性, 同时又从滑坡变形机理的角度建立了坡脚变形的预测模型, 实现了对边坡坡脚变形分布区间的概率性预测。此外, 该模型还量化了不同岩土体参数对降雨入渗非饱和土坡坡脚变形的影响程度, 其中关键影响因素分别为水力参数 k_s 、 α 以及变形参数 E 。

(3) 本文提出的边坡坡脚变形预测方法, 充分利用有限的孔压监测数据开展岩土体参数的贝叶斯更新, 进而实现边坡变形概率的预测, 形成了一套基于间接监测数据的边坡坡脚变形预测方法, 为滑坡变形预测提供了新思路。

参 考 文 献

- [1] 代贞伟, 殷跃平, 魏云杰, 等. 三峡库区藕塘滑坡变形失稳机制研究[J]. 工程地质学报, 2016, 24(1): 44-55.
DAI Zhen-wei, YIN Yue-ping, WEI Yun-jie, et al. Deformation and failure mechanism of Outang Landslide in Three Gorges Reservoir Area[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2016, 24(1): 44-55.
- [2] 吴芳, 张璐璐, 郑文荣, 等. 基于随机多项式展开的流固耦合非饱和土坡概率反分析[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(12): 2215-2222.
WU Fang, ZHANG Lu-lu, ZHENG Wen-tang, et al. Probabilistic back analysis method for unsaturated soil slopes with fluid-solid coupling process based on polynomial chaos expansion[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(12): 2215-2222.
- [3] 许强, 汤明高, 徐开祥, 等. 滑坡时空演化规律及预警预报研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1104-1112.
XU Qiang, TANG Ming-gao, XU Kai-xiang, et al. Research on space-time evolution laws and early warning-Prediction of landslides[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(6): 1104-1112.

- [4] TANG Hui-ming, WASOWSKI J, JUANG C H. Geohazards in the Three Gorges Reservoir Area, China—lessons learned from decades of research[J]. **Engineering Geology**, 2019, 261: 105267.
- [5] 李壮, 高杨, 贺凯, 等. 贵州省六盘水水城高位远程滑坡流态化运动过程分析[J]. 地质力学学报, 2020, 26(4): 520-532.
- LI Zhuang, GAO Yang, HE Kai, et al. Analysis of the fluidization process of the high-position and long-runout landslide in Shuicheng, Liupanshui, Guizhou Province[J]. **Journal of Geomechanics**, 2020, 26(4): 520-532.
- [6] CALVELLO M, CASCINI L, SORBINO G. A numerical procedure for predicting rainfall-induced movements of active landslides along pre-existing slip surfaces[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2008, 32: 327-351.
- [7] HERRERA G, FERNANDEZ-MERODO J A, MULAS J, et al. A landslide forecasting model using ground based SAR data: the Portalet case study[J]. **Engineering Geology**, 2009, 105(3-4): 220-230.
- [8] ZHAO N H, HU B, YI Q L, et al. The coupling effect of rainfall and reservoir water level decline on the Baijiabao Landslide in the Three Gorges Reservoir Area, China[J]. **Geofluids**, 2017(12): 1-12.
- [9] 杜娟, 殷坤龙, 柴波. 基于诱发因素响应分析的滑坡位移预测模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(9): 1783-1789.
- DU Juan, YIN Kun-long, CHAI Bo. Study of displacement prediction model of landslide based on response analysis of inducing factors[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(9): 1783-1789.
- [10] 杨背背, 殷坤龙, 杜娟. 基于时间序列与长短时记忆网络的滑坡位移动态预测模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(10): 2334-2343.
- YANG Bei-bei, YIN Kun-long, DU Juan. A model for predicting landslide displacement based on time series and long and short term memory neural network[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2018, 37(10): 2334-2343.
- [11] 郭凯, 林顺, 杨雪莲. 基于时间序列分析的公路降雨型滑坡位移预测[J]. 路基工程, 2019, 4(5): 188-193.
- WU Kai, LIN Shun, YANG Xue-lian. Displacement prediction of highway rainfall-induced landslide based on time series analysis[J]. **Subgrade Engineering**, 2019, 4(5): 188-193.
- [12] 左自波, 张璐璐, 程演, 等. 基于 MCMC 法的非饱和土渗流参数随机反分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(8): 2393-2400.
- ZUO Zi-bo, ZHANG Lu-lu, CHENG Yan, et al. Probabilistic back analysis of unsaturated soil seepage parameters based on Markov chain Monte Carlo method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(8): 2393-2400.
- [13] 赵腾远, ALADEJARE A E, 王宇. 基于贝叶斯方法的模型选择以及岩石性质概率表征[J]. 武汉大学学报(工学版), 2016, 49(5): 740-744.
- ZHAO Teng-yuan, ALADEJARE A E, WANG Yu. Bayesian model selection and characterization for rock properties[J]. **Engineering Journal of Wuhan University**, 2016, 49(5): 740-744.
- [14] WANG Y, CAO Z J. Probabilistic characterization of Young's modulus of soil using equivalent samples[J]. **Engineering Geology**, 2013, 159: 106-118.
- [15] KELLY R, HUANG J S. Bayesian updating for one-dimensional consolidation measurements[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2015, 52(9): 1318-1330.
- [16] 蒋水华, 欧阳苏, 冯泽文, 等. 基于结构面参数概率分布更新的 节理岩质边坡可靠性分析[J]. 岩土力学, 2021, 42(9): 2589-2599.
- JIANG Shui-hua, OUYANG Su, FENG Ze-wen, et al. Reliability analysis of jointed rock slopes using updated probability distributions of unsaturated plane parameters[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(9): 2589-2599.
- [17] LI Z B, GONG W P, LI T Z, et al. Probabilistic back analysis for improved reliability of geotechnical predictions considering parameters uncertainty, model bias, and observation error[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2021, 115: 104051.
- [18] TER BRAAK C J F, VRUGT J A. Differential evolution Markov Chain with snooker updater and fewer chains[J]. **Statistics and Computing**, 2008, 18: 435-446.
- [19] ZHANG L L, ZUO Z B, YE G L, et al. Probabilistic parameter estimation and predictive uncertainty based on field measurements for unsaturated soil slope[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 48: 72-81.
- [20] 钟尔杰, 黄廷祝. 数值分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- ZHONG Er-jie, HUANG Ting-zhu. Numerical analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [21] CHIU C F, YAN W M, YUEN K V. Estimation of water retention curve of granular soils from particle-size distribution—a Bayesian probabilistic approach[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2012, 49(9): 1024-1035.
- [22] ZHANG L L, ZHANG J, ZHANG L M, et al. Back

- analysis of slope failure with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(7-8): 905-912.
- [23] 蒋水华, 冯泽文, 刘贤, 等. 基于自适应贝叶斯更新方法的岩土参数概率分布推断[J]. 岩土力学, 2020, 41(1): 325-335.
- JIANG Shui-hua, FENG Ze-wen, LIU Xian, et al. Inference of probability distributions of geotechnical parameters using adaptive Bayesian updating approach [J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(1): 325-335.
- [24] HASTINGS W K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications[J]. **Biometrika**, 1970, 57(1): 97-109.
- [25] VRUGT J A, TER BRAAK C J F, CLARK M P, et al. Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling: doing hydrology backward with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. **Water Resources Research**, 2008, 44(12): 1-15.
- [26] LALOY E, VRUGT J A. High-dimensional posterior exploration of hydrologic models using multiple-try DREAM(ZS) and high-performance computing[J]. **Water Resources Research**, 2012, 48(1): W01526.
- [27] GELMAN A, RUBIN D B. Inference from iterative simulation using multiple sequences[J]. **Statistical Science**, 1992, 7(4): 457-472.
- [28] FRIEDMAN J H. Multivariate adaptative regression splines[J]. **The Annals of Statistics**, 1991, 19: 1-141.
- [29] ZHANG W G, GOH A T C. Multivariate adaptive regression splines and neural network models for prediction of pile drivability[J]. **Geoscience Frontiers**, 2016, 7(1): 45-52.
- [30] 王芳杰, 王福建, 王雨晨, 等. 基于 LightGBM 算法的公交行程时间预测[J]. 交通运输系统工程与信息, 2019, 19(2): 120-125.
- WANG Fang-jie, WANG Fu-jian, WANG Yu-chen, et al. Bus travel time prediction based on light gradient boosting machine algorithm[J]. **Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology**, 2019, 19(2): 120-125.
- [31] GAN M, PAN S Q, CHEN Y P, et al. Application of the machine learning light GBM model to the prediction of the water levels of the lower columbia River[J]. **Journal of Marine Science and Engineering**, 2021, 9(5): 1-22.
- [32] RICHARD L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. **Physics**, 1931, 1(5): 318-333.
- [33] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1980, 44(5): 892-898.
- [34] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. **Water Resources Research**, 1976, 12(3): 513-522.
- [35] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R, WIDGER R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1978, 15(3): 313-321.
- [36] CHO S E, LEE S R. Instability of unsaturated soil slopes due to infiltration[J]. **Computers and Geotechnics**, 2001, 28(3): 185-208.

上接第 1111 页

- [18] DIEDERICHS M S. The 2003 Canadian geotechnical colloquium: mechanistic interpretation and practical application of damage and spalling prediction criteria for deep tunnelling[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2007, 44: 1082-1116.
- [19] 洪陈杰, 黄曼, 夏才初, 等. 岩体结构面各向异性变异系数的尺寸效应研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(6): 2098-2109.
- HONG Chen-jie, HUANG Man, XIA Cai-chu, et al. Study of size effect on the anisotropic variation coefficient of rock joints[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(6): 2098-2109.
- [20] BARTON N, BANDIS S. Some effects of scale on the shear strength of rock behavior of rock joints[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 1980, 17(3): 69-73.
- [21] TATONE BSA, GRASSELLI G. An investigation of discontinuity roughness scale dependency using high-resolution surface measurements[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2013, 46(4): 657-681.
- [22] LI D, LI C C, LI X. Influence of sample height-to-width ratios on failure mode for rectangular prism samples of hard rock loaded in uniaxial compression[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2011, 44(3): 253-267.